Pluralités culturelles et universalité des mathématiques :
enjeux et perspectives pour leur enseignement
et leur apprentissage

espace mathématique francophone
Alger : 10-14 Octobre 2015

LA PENSÉE MATHÉMATIQUE DU POINT DE VUE DE LA THÉORIE DE L'OBJECTIVATION[1]

Luis RADFORD[*]

Résumé – On aborde ici le thème de la pensée mathématique du point de vue de la théorie de l'objectivation. On distingue en particulier la pensée mathématique dans son sens anthropologique et dans son sens subjectif. Un exemple tiré d'une classe de 2[e] année portant sur la pensée algébrique sert à illustrer les idées présentées dans l'article.

Mots-clefs : pensée algébrique, médiation, objectivation, pure possibilité, activité d'enseignement-apprentissage.

Abstract – This article deals with mathematical thinking as understood in the theory of objectification. A distinction is made between two senses of mathematical thinking: an anthropological sense and a subjective one. This distinction is illustrated through a Grade 2 classroom episode dealing with algebraic thinking.

Keywords: Algebraic thinking, mediation, objectification, pure possibility, teaching-learning activity.

I. INTRODUCTION

Dans ce texte, je voudrais aborder le thème de la pensée mathématique dans le cadre d'une théorie dialectico-matérialiste d'inspiration vygotskienne : la théorie de l'objectivation (Radford 2011, 2013)[2]. Cette théorie, dont le but est de comprendre l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques comme un processus conjoint historico-culturel de productions de savoirs et des subjectivités, part de la prémisse selon laquelle l'étude didactique de la pensée mathématique exige la prise en compte de la pensée du sujet pensant et de la pensée en tant qu'entité historico-culturelle. C'est à la pensée du sujet pensant que se livre la psychologie expérimentale depuis son invention au XIX[e] siècle. La pensée en tant qu'entité historico-culturelle est ce à quoi on fait référence quand on parle, par exemple, de la

[1] Cet article provient d'un programme de recherche subventionné par le Conseil de recherches en sciences humaines du Canada.
[*] Université Laurentienne – Canada – Lradford@laurentian.ca
[2] La matérialisme dialectique pose le problème de l'être et du savoir d'une manière tout à fait différente de celle qu'on trouve dans le rationalisme et l'idéalisme qui ont servi de base (directement ou indirectement) à élaboration de plusieurs théories en didactique des mathématiques (Kant, Descartes, etc.). Un exposé du matérialisme dialectique n'est pas possible à l'intérieur de cet article. Le lecteur intéressé à plonger dans une lecture sur le matérialisme dialectique pourra consulter les livres d'Ilyenkov (1977) et de Fedoseyev et al. (1977).

Radford L. (2015) Pensée mathématique du point de vue de la théorie de l'objectivation. In Theis L. (Ed.) *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage* – Actes du colloque EMF2015 – GT3, pp. 334-345.

pensée mathématique grecque ancienne ou de la pensée mathématique babylonienne ou de la pensée mathématique moderne. C'est une forme de pensée qui ne peut pas se réduire à la pensée d'un individu : elle transcende celui-ci. Pour accentuer la différence, nous suggérons d'appeler *pensée subjective* la pensée du sujet pensant et pensée culturelle la pensée qui transcende le sujet en tant qu'individu.

Cette façon de poser le problème didactique de l'étude de la pensée (mathématique ou autre) demande de fournir une caractérisation de ces deux types de pensée. Qu'entend-on précisément par pensée subjective? Qu'entend-on par pensée culturelle? La première question consiste à demander une caractérisation de ce que les Grecs anciens appelaient ψυχή (*psyché*), l'esprit, le souffle qui anime le sujet. C'est dans ce sens que nous pouvons dire qu'il nous faut une caractérisation *psychique* de la pensée. La deuxième question consiste à demander une caractérisation *anthropologique* de la pensée.

La caractérisation psychique de la pensée qu'offre la psychologie traditionnelle ne nous semble pas ouvrir une avenue prometteuse à notre recherche[3]. Elle souffre d'au moins trois problèmes importants :

- *primo*, la psychologie traditionnelle conçoit la pensée du sujet comme une activité *mentale*, c'est-à-dire comme quelque chose *en nous*, une activité qui *émane purement du sujet* et qui a lieu à l'intérieur de la boîte crânienne;
- *secundo,* dans la psychologie traditionnelle, le ψυχή ou souffle qui anime le sujet est confiné à la résolution de problèmes. Le sujet est réduit à un sujet purement rationnel, dépouillé de toute la dimension affective, émotionnelle et motivationnelle.
- *tertio,* la psychologie traditionnelle ne tient pas compte de la dimension anthropologique et se penche sur la pensée subjective comme si celle-ci fonctionnait indépendamment de l'autre.

On sait très bien l'antipsychologisme qu'a entouré la théorie des situations dès ses débuts (Brousseau 2006). La théorie des situations ne fait pas que s'opposer aux caractérisations psychologiques de la pensée. En fait, elle n'a pas besoin d'une caractérisation *psychique* quelconque de la pensée, car le sujet sur lequel cette théorie se penche est considéré comme un sujet *épistémique* (Brousseau 2005). Il s'agit, en effet, d'un être connaisseur formel. Le sujet sur lequel porte la théorie de l'objectivation, par contre, est un sujet concret, réel, qui souffre, jouit, sent, rêve. D'où le besoin, en ce qui nous concerne, de nous tourner vers une caractérisation psychique de la pensée. Or, en réduisant la pensée subjective à une activité mentale, la piste qu'offre la psychologie traditionnelle ne nous semble pas satisfaisante. Comme suggérait l'épistémologue dialecticien Evald Ilyenkov (1977), on pourrait décortiquer n'importe quelle boîte crânienne en morceaux chaque fois plus petits sans pour autant y trouver une seule pensée. On pourrait remarquer, en passant, que la conception selon laquelle les idées sont *en nous*, n'a été possible, historiquement parlant, que grâce à l'élaboration d'une métaphore d'origine religieuse. Celle-ci permet d'imaginer le sujet comme constitué d'une sorte de cavité où se déroule une vie intérieure. C'est ainsi qu'avec Saint Augustin à la fin du IVe siècle, on ne trouve pas Dieu à l'extérieur, mais à l'intérieur de soi. L'idée du « sujet creux » aurait été impensable pour les Grecs.

Il nous faut donc, pour commencer, une définition plus large ou différente de la pensée du sujet (une définition subjective de la pensée), ainsi qu'une définition anthropologique de la

[3] La psychologie traditionnelle, comme celle qui s'inspire du traitement de l'information ou de la résolution de problèmes (Andler 2004 ; de Vega 1986; Kotovsky et Simon 1990) décortiquent analytiquement le fonctionnement mentale en sous-fonctions qui opèrent sans égard au contexte. Elles font appel à un sujet *a*historique et *a*culturel. Pour une critique de cette conception de la pensée qu'offre la psychologie traditionnelle voir (Martin 2004).

pensée, pour pouvoir ensuite aborder le problème de l'*articulation* de la pensée dans son sens anthropologique et de la pensée dans son sens subjectif.

II. LA CARACTERISATION ANTHROPOLOGIQUE DE LA PENSEE

La caractérisation anthropologique de la pensée que nous suggérons dans cet article est directement liée à l'agir des individus et aux pratiques sociales à l'intérieur desquelles ces individus agissent. C'est ce sens contextualisé de *l'action* d'un *sujet concret* à l'égard de la *pratique sociale et culturelle* que traduit l'adjectif *anthropologique* ici. Elle est aussi ancrée dans un concept très particulier de synthèse. Le concept de synthèse est un concept qui a une longue histoire en philosophie. Kant l'utilise comme le processus qu'effectue la raison permettant de subsumer des singularités sous un même concept, qu'il prend comme déjà donné. C'est la question de l'apriorisme kantien. Dans la perspective esquissée ici, le point crucial est l'absence de concept *a priori*. Il y a plutôt un monde concret et des sujets concrets qui, à l'intérieur des pratiques sociales, mènent certaines actions en vue de satisfaire leurs besoins de subsistance et d'autres besoins (intellectuels, par exemple).

Dans ce contexte, le concept de pensée que nous suggérons apparaît en tant que *synthèse* culturellement codifiée du travail ou labeur humain. Par exemple, les méthodes anciennes de résolution d'équations qu'on trouve chez Diophante sont le résultat d'une synthèse de manières de résoudre certaines équations. On a résolu une équation disons e_1, puis une équation différente e_2, etc. C'est la synthèse culturellement codifiée de ces manières de résoudre ces équations qui constitue une pensée mathématique.

Comme synthèse, la pensée ne porte pas sur la résolution de l'équation e_1 ou sur la résolution de n'importe laquelle des équations e_j à la base de la synthèse. La pensée les dépasse toutes et ne coïncide avec aucune des manières de résoudre ces équations. De par la synthèse dont elle est issue, la pensée se constitue en ce que dans le matérialisme dialectique on appelle *pure possibilité* : celle de résoudre d'autres équations *similaires* et de s'attaquer à des équations *différentes*.

La synthèse mentionnée ici est une synthèse de *non-identité*. Elle est synthèse non-identitaire au sens suivant. La résolution d'une équation e_i est toujours *différente* de celle d'une autre équation e_j. Mais, en même temps, ces résolutions différentes sont considérées comme la *même*. C'est une synthèse de différentes singularités et, comme tel, elle n'est pas une abstraction, mais une synthèse qui contient les divergences et les contradictions des singularités (résolution des équations e_i, e_j, etc.) qu'elle s'efforce de tenir ensemble. Il s'agit d'une synthèse non-identitaire qu'injecte des contradictions internes dans la pensée. Au lieu d'être une faille ou une imperfection, la synthèse non-identitaire confère à la pensée une nature inconciliable vis-à-vis les éléments synthétisés. Les inévitables contradictions internes de la pensée sont précisément ce qui permet son développement dans la pratique sociale. En tant que porteuse de contradictions, la pensée ouvre un espace pour l'émergence de nouvelles actions et de nouvelles interprétations et créations.

Pour résumer, dans le mouvement de synthèse, les singularités des actions, toujours concrètes et déterminées spatialement et temporellement, toujours différentes les unes des autres, se voient *reflétées* dans ce qui devient reconnu comme une même manière d'agir et de réfléchir, se constituant ainsi en un *prototype* d'action et de réflexion. C'est ce que nous appelons ici *pensée*. Puisque cette synthèse est ancrée et résulte d'actions situées dans la pratique sociale, on peut aussi dire que la pensée est une *pratique réflexive*. La pensée mathématique babylonienne, par exemple, est un ensemble de synthèses de formes d'agir et de réfléchir issues de problèmes pratiques générés par un besoin de répondre à des problèmes administratifs, beaucoup d'entre eux portant sur la comptabilité, la répartition de rations, la mesure et le poids des choses, etc.

Quand un scribe dit dans un texte remontant probablement au 18e siècle av. J-C: « Un champ. Les quatre fronts et le champ j'ai accumulés: 41´40´´» (Høyrup 1995, p. 1), il nous renvoie à une pratique d'arpentage promue par des besoins de contrôle administratif et décrite abondamment par Høyrup (2002), Nissen, Damerow et Englund (1993) et Robson (2008), entre autres. Dans ce champ, il faut lire un champ quadratique. Le scribe nous dit avoir trouvé 41´40´´ comme résultat de la somme des nombres mesurant les quatre côtés et l'aire. En notations modernes, si la longueur du côté est désignée par s, on aurait alors: $4s + s^2 = 41´40´´$. Høyrup dit :

> Il faut savoir que les Babyloniens concevaient un carré comme «étant» son côté et «possédant» une aire (tandis que pour nous, comme on le sait, il [le carré] «est» de 4 m^2 et «possède» un côté de 2 m) (Høyrup 1995, p. 3).

C'est dans le contexte de cette pratique d'arpentage qui autorise cette conception du carré, que le scribe peut additionner côtés et aires et peut imaginer et effectuer des opérations (additionner, arracher, etc.) sur le champ auquel fait référence l'énoncé du problème, problème qui consiste à trouver le côté s. Cette synthèse de solutions de problèmes — solutions similaires, mais toujours différentes les unes des autres — qui se constitue en façon archétypale d'agir, de dire, d'imaginer, d'effectuer des calculs, etc. se constitue aussi, *en même temps*, en pensée mathématique.

À ce sensualisme pratique, dans lequel les objets mathématiques babyloniens restent sans définitions précises et où les calculs se succèdent en même temps qu'ils montrent ce qui est à montrer, on pourrait opposer la pensée mathématique ancienne grecque issue, elle, plutôt d'une pratique aristocratique athénienne soutenue par la distinction entre travail intellectuel et manuel et une organisation sociale à la base de laquelle nous trouvons la distinction entre individu libre et esclave. Il s'agit ici d'une pensée où le calcul n'est le paradigme du faire, car l'aristocratie ne calcule pas; le calcul est laissé plutôt aux marchands et aux esclaves. Cette pensée est plutôt celle du λόγος (*logos*) — une raison qui vise à raisonner de manière juste et vraie pour s'élever à des niveaux supérieurs de la connaissance. C'est dans cette société discursive, tiraillée par la distinction entre apparence (δόξα, *doxa*) et vérité, que la parole et son usage social prennent une dimension épistémologique inconnue des Babyloniens. Ce n'est donc pas le champ issu de la pratique kinesthésique de l'arpentage et les problèmes et procédures concomitantes de résolution qui sont à la base de la pensée ici, mais ces formes géométriques inchangeables dépouillées d'activité manuelle et corporelle.

III. LA CARACTERISATION SUBJECTIVE DE LA PENSEE

La définition anthropologique de la pensée en tant que *pratique culturelle réflexive* doit maintenant être complétée par une caractérisation subjective de la pensée.

Dans son sens anthropologique, nous l'avons dit, la pensée est *pure possibilité*. Cela revient à dire que la pensée est une capacité toujours latente d'agir ou de réfléchir d'une certaine manière. C'est pourquoi on peut dire que la pensée d'une culture apparaît aux différents sujets imprégnés de cette culture comme *potentialité* ou *virtualité*, ce que Hegel appelait un *général.*[4]

[4] Insistons ici sur le fait que la *potentialité* est une catégorie ontologique fondamentale du matérialisme dialectique. Elle implique l'idée qu'un événement puisse se produire. Un poisson naît avec la potentialité de nager. Mais cette potentialité ne s'actualise qu'a travers un mouvement précis : aller d'un point A à un point B. D'autres potentialités ne sont pas innées, mais développées culturellement, comme, par exemple, résoudre une

Revenons à notre exemple de la résolution d’équations et considérons en particulier la résolution de l’équation 4xn + 2 = 27 – n. La Figure 1 montre les traces laissées par des élèves d’une 6^e^ année (11-12 ans).

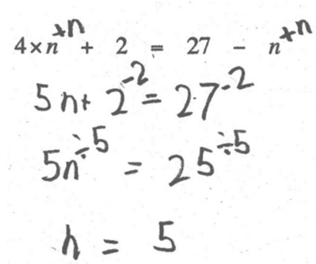


Figure 1*- Les traces de la résolution d’une équation par un groupe d’élèves de 6^e^ année*

La pensée algébrique des élèves ne doit pas être confondue avec les signes montrés dans la Figure 1. On ne peut pas confondre signes et pensée. Ce que la Figure 1 nous livre, ce sont les traces de la pensée des élèves, une sorte d’écho de celle-ci. En termes sémiotiques, on pourrait dire que la Figure 1 est un texte indexical : un texte qui pointe vers quelque chose qui n’est plus là, comme les empreintes que laisse un promeneur sur le sable après son passage. Confondre pensée et signes reviendrait à confondre le promeneur avec ses empreintes.

Qu’est donc la pensée des élèves? La pensée des élèves est l’*actualisation* ou *concrétisation* ou *matérialisation* de l’archétype culturel de résolutions d’équations.[5] Au sens phénoménologique strict, la pensée des élèves est ce qui *apparaît*. C’est-à-dire, l’agi, le parlé, le perçu, le gesticulé, le symbolisé, le raisonné qui se donnent à voir au cours de l’activité de la résolution de l’équation en question. Comme telle, la pensée subjective n’est pas une série de choses qui ont lieu à l’intérieur d’une boîte crânienne, mais ce qui se déploie devant soi. Ce n’est pas une série d’actions ayant lieu dans une chambre mystérieuse et inaccessible, mais un *événement* qu’on appelle un *singulier*.

Ce qui se déploie devant soi n’est donc pas quelque chose dont l’origine serait à trouver dans le vide interne du sujet (de l’élève), mais dans la matérialisation d’une potentialité culturelle. Mais dans sa matérialisation, cette potentialité (dans notre exemple, la pensée algébrique au sens anthropologique) devient un *existant* qui ne peut jamais livrer la potentialité toute entière. La matérialisation ou actualisation de celle-ci est toujours un *singulier* : ici, une matérialisation qui mobilise un savoir sur les équations à coefficients entiers; la manière d’isoler l’inconnue quand elle apparaît comme soustraction dans l'un des côtés de l’équation, etc.

IV. L’ACTIVITE HUMAINE COMME MEDIATION ENTRE SUJET ET PENSEE

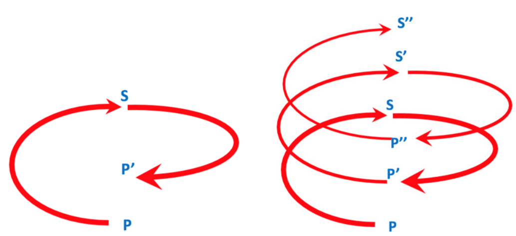
Or, parce que la pensée d’une culture est plutôt prototype d’action et de réflexion, une forme vide de différences et de similarités, elle ne se donne pas à voir au sujet qui apprend. C’est

équation d’une certaine manière. Si nous étions nés à l’époque de Diophante, cette potentialité existerait en termes d’arithmes et de certaines façons d’opérer sur les nombres connus et non connus. L’opération réelle sur les nombres connus et inconnus à la Diophante serait *l’actualisation* ou *matérialisation* de cette potentialité. Pour une discussion plus détaillée sur la potentialité, voir (Radford 2015).

[5] Il ne faut surtout pas concevoir l’actualisation comme une simple marque ou comme copie de la potentialité : actualisation et potentialité ne sont pas de catégories ontologiques du même ordre. La potentialité n’a pas de forme. Aucune actualisation ne peut lui ressembler. Elle n’est que possibilité. Et, comme nous verrons dans un moment (Figure 2, ci-bas), il n’y a pas de déterminisme entre la potentialité et l’actualisation : leur relation est plus complexe. Elle est dialectique.

seulement dans l'épistémologie rationaliste que sujet et pensée sont *déjà* ensemble, car pour le rationalisme et ses variantes individualistes (comme le constructivisme), la relation entre sujet et pensée est une relation d'identité. L'Autre est le Même. C'est pourquoi, les Rationalistes du XVIIe siècle, comme Descartes et Leibniz, considéraient que les mathématiques pouvaient se pratiquer même les yeux fermés; pour eux, les principes dont nous avons besoin en mathématiques sont des « principes internes » au sujet, c'est-à-dire qu'ils sont à l'intérieur de nous (Leibniz 1966, pp.34-37; pour plus de détails, voir Radford 2011). Dans la perspective matérialiste esquissée ici, par contre, la pensée (au sens anthropologique) est là, devant nous. Mais pour se *révéler*, pour devenir objet de conscience, elle doit passer de potentialité à actualité; elle doit acquérir des déterminations sensibles. La pensée doit être mise en *mouvement,* s'*actualiser* et apparaître comme *singulier*. Elle ne peut apparaître qu'à travers une *médiation*.

Quelle est donc cette médiation qui met la pensée en mouvement et lui permet de se révéler dans un singulier ? La réponse est : l'activité humaine. Ce n'est qu'à travers l'activité que la pensée se singularise et peut être saisie, sentie et devenir ainsi objet de conscience. La Figure 2a illustre cette idée du point de vue phylogénétique : à un certain moment du développement d'une culture, la pensée culturelle, P, est mise en mouvement par l'activité humaine (symbolisée par les flèches en bas) et se révèle à la conscience des sujets concrets dans le singulier S. C'est à l'intérieur de cette activité (ou d'une autre activité), qui est toujours mouvement et qui est déjà affectée par P et S, que les sujets concrets peuvent maintenant étendre, raffiner, ou transformer cette pensée ou potentiel P, donnant comme résultat une nouvelle pensée culturelle ou potentiel P'. La nouvelle potentialité ainsi créée peut, par la médiation d'autres activités, se révéler ou s'actualiser dans un autre singulier S', etc. (voir Figure 2b).



Figures 2a (à gauche) et 2b (à droite) *- L'activité effectue la médiation qui permet à la pensée de passer du potentiel à l'actuel.*

Le singulier est la pensée dans son apparition phénoménologique telle qu'elle est médiatisée par l'activité, devenant ainsi pensée subjective. Dans sa singularité, la pensée s'expose et devient susceptible d'être examinée, généralisée, réfutée, transformée, subvertie.

La conceptualisation de la pensée mathématique qu'offre la théorie de l'objectivation, conceptualisation esquissée brièvement ci-dessus, permet de poser le problème du travail didactique autour d'un nouveau concept : le concept d'enseignement-apprentissage. Ce concept, de nature éthico-dialectique, est élaboré dans la section suivante.

V. LE CONCEPT D'ENSEIGNEMENT-APPRENTISSAGE

Nous avons dit que la Figure 1 comporte les traces de la pensée d'un groupe d'élèves de 6e année (élèves de 11-12 ans).[6] Il s'agit d'une classe d'élèves que nous avons suivi pendant 5

[6] On peut poser la question : s'agit-il de la pensée *collective* ou de la pensée d'*un* élève ? Il nous faut revenir à la définition proposée plus haut pour répondre. On a dit que la pensée subjective est ce qui *apparaît* comme résultat

ans. Nous avons commencé à suivre cette classe quand les élèves étaient en 2^e année (ils avaient alors 7-8 ans). Les traces de la pensée des élèves que nous livre la Figure 1 sont donc les traces d'une pensée subjective développée. C'est-à-dire, une pensée subjective qui a connu une transformation d'une année d'instruction à l'année suivante. Ce développement n'est pas naturel; au contraire, il s'agit d'un développement culturel, soutenu par un travail didactique continu.

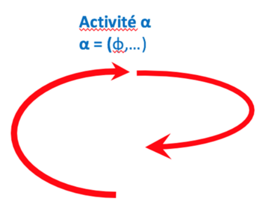
Pour que la pensée algébrique (au sens anthropologique) — pensée constituée historiquement — commence à se révéler à la conscience des élèves, il a fallu mettre sur pied une série d'activités depuis la deuxième année. Ces activités acquièrent un sens didactique précis dans la théorie de l'objectivation qu'il convient de spécifier maintenant.

Pour la théorie de l'objectivation, toute activité de salle de classe comporte deux *moments* :

(1) un moment *a priori* ou premier moment où l'activité est *configurée*. C'est à ce moment que nous préparons avec les professeurs les problèmes qui seront présentés aux élèves : nous décidons du type, de l'ordre et de l'enchainement des questions; des ressources matérielles qui seront mises à la disposition des élèves, etc.

(2) le deuxième moment est l'implémentation de ce premier moment : c'est l'activité *stricto sensu*. C'est-à-dire, ce qui se passe en salle de classe (mais peut aussi aller au-delà).

Remarquons que, normalement, les théories éducatives traditionnelles distinguent plusieurs types d'activité à l'intérieur de ce qui se passe en salle de classe : on distingue ainsi l'activité de l'élève de celle du professeur. Nous prenons une autre orientation : l'activité qui est implémentée est considérée comme *une seule* activité. Nous parlons alors de l'*activité enseignement-apprentissage*. Cette activité est caractérisée par son objet (Leontiev 1984), dans notre cas, un objet didactique. Le fait que pour l'élève cet objet didactique ne soit pas apparent au début n'enlève pas à l'activité son propre objet. Comme nous l'illustrerons dans un moment, la transparence relative de l'objet de l'activité aura des répercussions dans la manière dont le professeur et les élèves s'engagent dans l'activité. Dans le cas présenté ici, l'objet des activités était la prise de conscience chez les élèves de formes de pensée algébriques historiquement et culturellement constituées. La Figure 3 montre l'activité de salle de classe, désignée par la lettre **α**: ce qui est en train de se produire en salle de classe réellement (les flèches rouges) ; l'activité y apparaît comme un *flux*, lui même changeant, affecté continuellement, entre autres, par le premier moment, désigné par **ϕ** (celui du projet didactique).[7]



de l'actualisation du potentiel (c'est-à-dire, la pensée au sens anthropologique). *Ce qui apparaît,* apparaît dans la classe et se révèle ainsi *aux élèves*. Bien que cette apparition se réfracte différemment dans la conscience de chaque élève, elle est à la fois individuelle et collective (elle est individuelle-collective), comme la musique que fait apparaître un orchestra qui joue une symphonie.

[7] Le fait que, placés maintenant du point de vue *ontogénétique*, nous utilisons un diagramme similaire à celui utilisé à la Figure 2 (qui portait sur le point de vue *phylogénétique*) ne veut pas dire que nous adoptons l'idée selon laquelle l'ontogénèse récapitule la phylogénèse (voir Furinghetti & Radford 2008). L'activité dans la Figure 2 n'a pas de moment didactique ϕ. C'est, entre autres, dans le moment ϕ qu'on voit un des effets de la culture dans l'apprentissage des élèves. C'est pourquoi Vygotsky (1997, p.88) disait que l'éducation peut être définie comme le développement artificiel de l'enfant.

Figure 3 *- L'activité « enseignement-apprentissage » α comme un flux affecté par φ, entre autres.*

En ce qui a trait au premier moment, le moment φ, celui de la configuration de l'activité, nos choix didactiques tiennent compte de la densité épistémologique de la pensée ciblée (ici la pensée algébrique) et du développement actuel de l'enfant (Vygotsky 1985). Par rapport à la densité épistémologique de la pensée algébrique, nous nous écartons de l'idée très répandue selon laquelle l'algèbre commence avec l'utilisation des lettres. L'idée, bien sûr, est fausse. Ni les anciens mathématiciens chinois, ni les scribes babyloniens n'ont eu recours à des lettres dans la pensée algébrique qu'ils ont développée. Ni l'écriture à base de sinogramme des premiers ni l'écriture cunéiforme des deuxièmes ne sont faites à partir de « lettres »! Il nous a fallu donc commencer par caractériser la pensée algébrique. En nous inspirant des discussions souvent tendues tenues durant les années 1980 et suivantes — consulter, par exemple, Bednarz, Kieran et Lee (1996); Filloy et Rojano (1989); Kieran (1989) — nous avons suggéré (Radford 2014) que la pensée algébrique élémentaire comprend trois éléments:

(1) *indéterminés*: la situation mathématique considérée contient de nombres non-connus (inconnues, variables, paramètres, etc.); c'est-à-dire, elle contient des indeéterminés.

(2) *dénotation*: les nombres indéterminés impliqués dans la situation doivent être *nommés* ou *signifiés* d'une certaine manière. La signification peut être accomplie de diverses manières. On peut utiliser des signes alphanumériques, mais pas nécessairement. La dénotation de nombres indéterminés peut également être signifiée par le langage naturel, les gestes, les signes non conventionnels (diagrammes, par exemple), ou même une combinaison de ceux-ci.

(3) *analyticité*: les nombres indéterminés sont traités comme s'ils étaient des nombres connus. C'est-à-dire, bien qu'ils ne soient pas connus, les nombres indéterminés sont traités de la même manière que les nombres connus : on les additionne, les soustrait, les multiplie, les divise, etc.

Cette caractérisation épistémologique de la pensée algébrique nous a guidés dans l'élaboration des tâches données aux élèves (temps 1 de l'activité) et dans l'implémentation de l'activité (temps 2). Voici un exemple de 2^{e} année.

La leçon commence avec la lecture d'une histoire que l'enseignante (E) fait aux élèves.

> Sylvain et Chantal ont des cartes de hockey. Chantal a trois cartes et Sylvain a deux cartes. Sa mère met certaines cartes dans trois enveloppes en veillant à mettre le même nombre de cartes de hockey dans chaque enveloppe. Elle donne une enveloppe à Chantal et 2 à Sylvain. Maintenant, les deux enfants ont la même quantité de cartes de hockey. Combien de cartes de hockey sont dans une enveloppe?

L'équation est illustrée au tableau, à partir d'enveloppes et de cartes en carton, comme le montre la Figure 4.

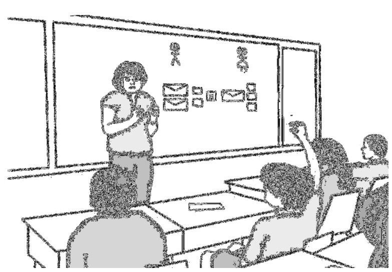


Figure 4 *- L'histoire de Chantal et de Sylvain.*

Au début, les étudiants ont abordé le problème par des procédures arithmétiques d'essai-erreur. Par exemple, au début de la leçon, Willy (W) suggère qu'il y a une carte dans chaque enveloppe :

W : Um, moi je pense qu'il y a … qu'il y a 1, umm… une carte de hockey.

E : Ok.

W : dans chaque carte [il veut dire enveloppe] parce que, euh, y'en a 3 cartes juste là (*en faisant référence au côté droit de l'équation au tableau; voir Figure 3*) et s'il y a juste 1 dans la carte [il veut dire enveloppe], ça, ça veut dire qu'il y a 4, et (*en faisant référence maintenant au côté gauche de l'équation*) y'en a 2 cartes juste là et 2, et c'est y'en a 2 dans les 2 enveloppes.

E : uhhuh, alors si je comprends bien Willy, tu as essayé la stratégie essai-erreur?

W : uhhuh…

E : C'est ça, tu as dit : ah! Je vais faire semblant qu'il y a une carte ici (*elle pointe une enveloppe*), une carte ici (*elle pointe une autre enveloppe*), une carte ici (*elle pointe une autre enveloppe*). C'est ça ce que t'as fait?

W : uhhuh…

E : puis, là, t'as calculé, s'il y a une carte ici, une carte ici, une carte ici, puis là tu as calculé 1, 2, 3, 4. C'est ça ce que t'as fait?

L'objet de l'activité est loin d'être transparent pour les élèves. L'enseignante pourrait tout simplement laisser les élèves faire tout le travail et se contenter de ce que les élèves pourraient produire par eux-mêmes. Elle pourrait aussi montrer comment résoudre l'équation (et par là montrer de manière ostensible l'objet de l'activité) et demander ensuite aux élèves de reproduire la solution à d'autres équations. Ces activités sont toujours possibles. Dans le premier cas, cependant, celui où l'activité est centrée sur l'élève, il n'y a aucune assurance que les élèves arrivent à actualiser ou matérialiser la pensée algébrique ciblée. C'est ce que nous observons en général. Dans le deuxième cas, où l'activité est centrée sur le professeur, l'activité de salle de classe pourrait finir par médiatiser la pensée visée, mais cette médiation serait très faible, car il lui manque l'engagement *cognitif* et *affectif* des élèves. Ceux-ci sont réduits au rôle de reproducteurs de comportements. Malgré ces différences, remarquons que, dans un cas comme dans l'autre, on différencie le travail du professeur de celui de l'élève. Le concept d'activité *d'enseignement-apprentissage* demande, par contre, un travail *conjoint* élèves-professeur, très souvent fort émotionnel. Il s'agit de faire émerger de ce travail conjoint, où vont se confondre dires, gestes, actions, symbolisations, l'actualisation ou la matérialisation d'une pensée algébrique ciblée. Cette actualisation ou matérialisation, souvent le résultat d'un processus progressif et pénible, est la *pensée subjective*. Malgré donc la non-transparence de l'objet de l'activité pour les élèves, l'enseignante doit garder l'activité d'enseignement-apprentissage en mouvement. Elle remercie Willy pour sa contribution et demande à la classe s'il y a d'autres idées. Joe (J) suggère d'enlever une enveloppe de Chantal et une enveloppe de Sylvain :

J : Um, moi je pense qu'il y a une [carte] dans chaque [enveloppe], parce que je voudrais enlever l'enveloppe là de Chantal.…

E : Ok

J : Et l'enveloppe de Sylvain et…

E : Pourquoi est-ce que tu enlèves une enveloppe ici, et une enveloppe ici?

J : Um, parce que si, parce que Chantal a 3 [cartes], et Sylvain a 2 [cartes], et si, et si y'a un carte dans ce … (*il pointe vers l'enveloppe qui reste à Sylvain*), ça va faire égale…

E : […] Alors, t'as trouvé ta solution comme ca? Toi, tu as isolé un petit peu, mais tu n'as pas isolé complètement, hen? Ça, c'était ta solution; tu as enlevé les enveloppes, hen?

J : Ouien…

La stratégie de Joe semble revenir sur la discussion que la classe a eue la veille au sujet de l'action d'enlever des enveloppes en vue de simplifier une équation, action qui a été illustrée à l'aide d'une balance. Aux lignes 1 et 3 du deuxième dialogue, Joe suggère, en effet, d'enlever une enveloppe de chaque côté de l'équation. Puisque cette étape est cruciale à la pensée algébrique (Filloy, Rojano & Puig 2007), l'enseignante intervient à la ligne 4. Elle est très tendue : elle sait que c'est un moment important de l'activité enseignement-apprentissage. L'enseignante invite donc Joe à articuler l'idée de manière explicite. Toutefois, comme le montre la ligne 5, l'action d'enlever une enveloppe du montant de Chantal et une enveloppe du montant de Sylvain est faite en vue de *simplifier* l'équation, et non pas pour *déduire* la valeur de l'inconnue. Nous voyons, en effet, qu'à sa troisième intervention, Joe *suppose* que l'enveloppe contient une carte. Il commence sa phrase avec la conjonction de subordination hypothétique « si ». Il dit : « si y'a une carte dans ce[tte]… [enveloppe]». Le reste de ses actions sert à vérifier qu'il y a égalité. La solution n'a pas été déduite, mais devinée. On n'opère pas sur l'indéterminé de manière analytique. Ce qui apparaît conceptuellement à la conscience des élèves n'est pas encore l'actualisation ou la matérialisation de la pensée algébrique.

Au cours de la discussion, l'enseignante revient sur l'idée d'enlever et, en s'adressant à Joe et à toute la classe, dit :

E : Tu dis, tu enlèves une [enveloppe] ici et tu enlèves une [enveloppe] ici. Alors… si j'enlève quelque chose d' un coté, est-ce que je dois enlever la même chose de l'autre coté?

Joe et élèves : Oui

L'enseignante invite à nouveau la classe à présenter d'autres idées et suggère de penser à la stratégie d'isolement dont la classe avait discuté la veille. L'équation est montrée au tableau (voir Figure 5, dessin 1). Cette fois-ci, c'est Cali (C) qui répond :

C : Um tu enlèves une enveloppe de Sylvain, et une enveloppe de Chantal (L'enseignante enlève une enveloppe du montant de Chantal et du montant de Sylvain; l'équation reste telle que montrée dans la Figure 5, dessin 2).

E: est-ce que c'est important d'enlever la même chose de chaque coté du [signe] égal?

C : Oui. Et tu peux enlever l'autre enveloppe… Oh non! Une carte de Sylvain, et une carte de Chantal (Cali pointe vers les cartes de Chantal. L'enseignante fait au tableau ce que Cali dit. L'équation apparaît maintenant comme montré sur la Figure 4, dessin 3).

E: Aw! (En s'adressant à toute la classe, pour s'assurer que les élèves suivent, elle dit) Encore une fois (elle prend une enveloppe de chaque côté de l'équation, puis une carte de chaque côté de l'équation), une enveloppe, on enlève une enveloppe, une carte, une carte.

C : Tu enlèves une carte de Sylvain et tu enlèves une autre carte de Chantal.

E : (En répétant la dernière partie de la phrase de Cali) Enlève une autre carte de Chantal (elle exécute les actions en même temps qu'elle parle; L'équation apparaît maintenant comme illustrée dans la Figure 4, dessin 4. Puis, ça nous donne…

Cali : La réponse!

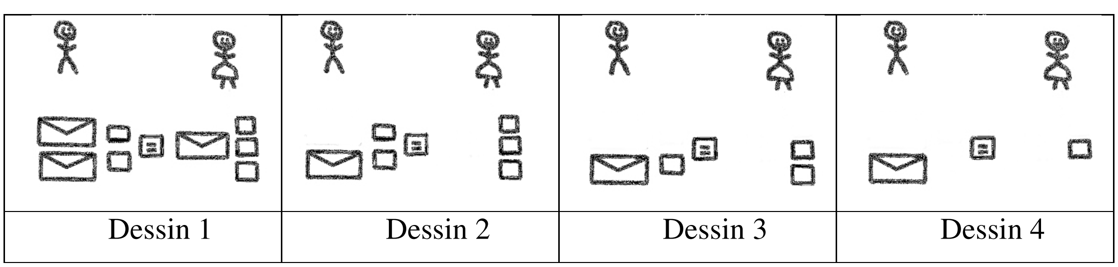


Figure 5 *- Les traces de la solution proposée par Cali.*

À travers la médiation d'un travail conjoint professeur-élèves se révèle maintenant un prototype général de résolution d'équations. La pensée algébrique dans son sens anthropologique se dévoile dans un singulier et devient ainsi objet de conscience. C'est ce processus de prise de conscience que nous avons appelé *objectivation* (Radford 2011). Après l'intervention de Cali, les élèves abordent d'autres équations similaires avec succès. Ils tombent par la suite sur une équation qui, après isolation, donne : 2 enveloppes d'un côté de l'équation et 6 enveloppes de l'autre côté. Les élèves reconnaissent qu'ils ont devant eux quelque chose d'autre. L'activité conjointe professeur-élèves se poursuit, rendant progressivement possible l'apparition ou la matérialisation d'autres aspects de la pensée algébrique et, par là, le développement de la pensée des élèves, c'est-à-dire la pensée subjective. Puisque l'apparition ou la matérialisation de la pensée algébrique est toujours unique, neuve, il est impossible de tomber exactement sur le même singulier, car la pensée subjective est toujours un même différent : la différence d'un même. Elle enferme le même et ne se réduit pas à celui-ci. Elle est à la fois l'achèvement de l'archétype et sa négation. Elle est toujours non-identité, déficit et surplus.

REFERENCES

Andler D. (2004) *Introduction aux sciences cognitives.* Paris: Gallimard.

Bednarz N, Kieran C, Lee L (1996) *Approaches to algebra. Perspectives for research and teaching*. Dordrecht: Kluwer.

Brousseau G. (2005) Réponses orales à Régis Gras. In Salin M, Clanché P, Sarrazy B. (Eds.) *Sur la théorie des situations didactiques* (pp. 43-47). Grenoble: La pensée sauvage.

de Vega M. (1986) Introducción a la psicología cognitiva. Mexico: Alianza Editorial Mexicana.

Brousseau G. (2006) Mathematics, didactical engineering and observation. In J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká, N. Stehlíková (Eds.) *Proceedings of the international group for the psychology of mathematics education* (Vol. 1, pp. 3-18). Prague: PME.

Fedoseyev P. N. (1977) *Philosophy in the USSR - dialectical materialism.* Moscow: Progress Publishers.

Filloy E, Rojano T. (1989) Solving equations: The transition from arithmetic to algebra. *For the Learning of Mathematics* 9(2), 19-25.

Filloy E, Rojano T, Puig L (2007) *Educational algebra*. New York: Springer Verlag.

Furinghetti F., Radford, L. (2008) Contrasts and oblique connections between historical conceptual developments and classroom learning in mathematics. In English L. (Ed.) *Handbook of international research in mathematics education (2nd edition)* (pp. 626 - 655). New York: Taylor and Francis.

Høyrup J. (1995) *Les quatre côtés et l'aire*. Téléchargé du site: http://www.academia.edu/3131730/Torino_Associazione_Subalpina_Mathesis

Høyrup J (2002) Lengths, widths, surfaces. A portrait of old Babylonian algebra and its kin. New York: Springer.

Ilyenkov E. V. (1977) *Dialectical logic*. Moscow: Progress Publishers.

Kieran C. (1989) A perspective on algebraic thinking. In Vernand G, Rogalski J, Artigue M. (Eds). *Proceedings of the 13th International Conference for the Psychology of Mathematics Education* 2, 163-171.

Kotovsky K, Simon H. A. (1990) What makes some problems really hard: Explorations in the problem space of difficulty. *Cognitive Psychology* 22, 143-183.

Leibniz G. W. (1966) *Nouveaux essais sur l'entendement humain*. Paris: Flammarion.

Leontiev A. N. (1984) *Activité, conscience, personnalité*. Moscou: Éditions du Progrès.

Martin J. (2004) The educational inadequacy of conceptions of self in educational psychology. *Interchange: A Quarterly Review of Education* 35, 185-208.

Nissen H, Damerow P, Englund R. (1993) *Archaic bookkeeping.* Chicago: The University of Chicago Press.

Radford L. (2011) Vers une théorie socioculturelle de l'enseignement-apprentissage: La théorie de l'objectivation. *Éléments* 1, 1-27.

Radford L. (2013) Three key concepts of the theory of objectification: Knowledge, knowing, and learning. *Journal of Research in Mathematics Education* 2(1), 7-44.

Radford L. (2014) The progressive development of early embodied algebraic thinking. *Mathematics Education Research Journal* 26(2), 257-277.

Radford L. (2015) Rhythm as an integral part of mathematical thinking. In Bockarova M., Danesi M., Martinovic D., Núñez R. (Eds.) *Mind in mathematics: Essays on mathematical cognition and mathematical method* (pp. 68-85). Munich: LINCOM GmbH.

Robson E. (2008) *Mathematics in ancient Iraq*. Princeton: Princeton University Press.

Vygotski L. (1985) *Pensée et langage*. Paris: Messidor.

Vygotsky L. (1997) *Collected works* (Vol. 3). New York: Plenum Press.